Differentialgleichungen

Eine (gewöhnliche) **Differentialgleichung** (DGL) erster Ordnung ist ein Ausdruck der Form

$$y' = f(x, y), \quad y(x0) = y0$$

Gesucht ist eine Funktion $y = y(x)$ in einer Veränderlichen, welche in einem Intervall $[x0, x1]$ definiert ist und die **Anfangsbedingung** $y(x0) = y0$ erfüllt.

Gewöhnlich: y ist eine Funktion *einer* Veränderlichen, es treten keine partiellen Ableitungen auf.
Erster Ordnung: Es treten nur Ableitungen erster Ordnung auf: y'.

Ein **System von** zwei **Differentialgleichungen** besteht aus gekoppelten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = \ldots, y_2(x_0) = \ldots$.

Anwendungen

$y' = \pm ky$	*Bankkonto / Zerfallsprozesse* Beispiel: Newtons Abkühlungsgesetz mit $y' = -0.02 \cdot y$
$P' = kP(P_0 - P)$	*Logistische Funktion*, z. B. Ausbreitung einer Krankheit Beispiel: $P_0 = 25000, k = 0.00003, P = 250$ in $[0, 60]$
$\frac{dC}{dt} = \frac{-k_1 C}{1+k_2 C}$	*Konzentration* in einem chemischen Reaktor Beispiel: $k_1 = 1.0, k_2 = 0.3, C(0) = 0.8$ bzw. $k_1 = 2.0, k_2 = 0.1, C(0) = 1.0$
$y' = -k\sqrt{y}A(y)$	*Auslaufender Wassertank* (Torricellis Gesetz) $A(y)$ Querschnittsfläche des Tanks in Höhe y, a die Fläche des Auslaufs, dann ist $k = a\sqrt{2g}$, $g = 9.81$ m/s^2 die Erdbeschleunigung.
$v' = -g + k/m\,\lvert v\rvert^p$	*Freier Fall mit Luftwiderstand* Luftwiderstand $F = kv^p, 1 \leq p \leq 2$, k eine Konstante, nach unten gerichtet. Beispiel: Fallschirmspringer mit $p = 1.1$, $c_w = k/m = 1.6$ (sog. cw-Wert) bei einem Gewicht von 80 kg.
$y_1' = -k_1 y_1 + k_3 y_3$ $y_2' = k_1 y_1 - k_2 y_2$ $y_3' = k_2 y_2 - k_3 y_3$	*(Chem.) Reaktionskinetik* Beispiel: $k_1 = 0.3, k_2 = 0.2, k_3 = 0.5$ mit Anfangsbedingungen $[0.6, 0.2, 0.2]$ im Zeitraum 0..10sec..
$dr/dt = 2r - \alpha\, r f$ $df/dt = -f + \alpha\, r f$ $dr/dt = 2(1 - \frac{r}{R})r - \alpha\, r f$ $\ldots$	*Lotka-Volterra Modell* Hasen (r, rabbits) und Füchse ('f') in einem geschlossenen ,Habitat'. Beispiel: $\alpha = 0.01$ und $r(0) = 300, f(0) = 150$ bzw. $r(0) = 102, f(0) = 198$ *Modifiziertes Lotka-Volterra Modell* Beispiel: Maximal $R = 300$ Hasen können ernährt werden.
$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0$ $\frac{d^2z}{dt^2} + 2\delta\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = 0$	*Schwingungen*, z. B. Federpendel ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$) Beispiel: $k = 5$N/m, $m = 0.1$kg, $z(0) = 0.1$m, $z'(0) = 0$m/s. *Gedämpfte Schwingung* Beispiel: $\delta = 1$.
$\ddot{z}(t) = -\frac{g}{L}\sin(z(t))$	*Mathematisches Pendel* Beispiel: $L = 1$m, Anfangsbedingungen $[\pi/4, 0]$. Vergleiche mit der Näherungslösung $\sin(z) \approx z$.

Eulersches Verfahren

```
function [x, y] = euler(f, a, b, y0, n)
h = (b-a)/n; x = a:h:b;
y(1) = y0;
for i = 1:n
    y(i+1) = y(i) + h * f(x(i), y(i));
end
```

Beispiel einer Differentialgleichungs-Funktion:

```
function dv = freier_fall(t, v)
g = 9.81; cw = 1.6              % or use 'global'
dv = -g + cw * abs(v)^1.1       % Ableitung dv/dt
```

Lösung mit Matlab

In Matlab werden Differentialgleichungen mit Hilfe von *Solvern* wie `ode23`, `ode45`, `ode15s`, . . . gelöst.

- Numerische Lösung

  ```
  [x, y] = ode45(@f, [x0, x1], y0);
  plot(x, y, 'o', x, y, '-')
  ...
  sol = ode45(@f, [x0, x1], y0, options);
  plot(sol.x, sol.y, 'o', sol.x, sol.y, '-')
  y = deval(sol, x);
  [y, yp] = deval(sol, x);
  ```

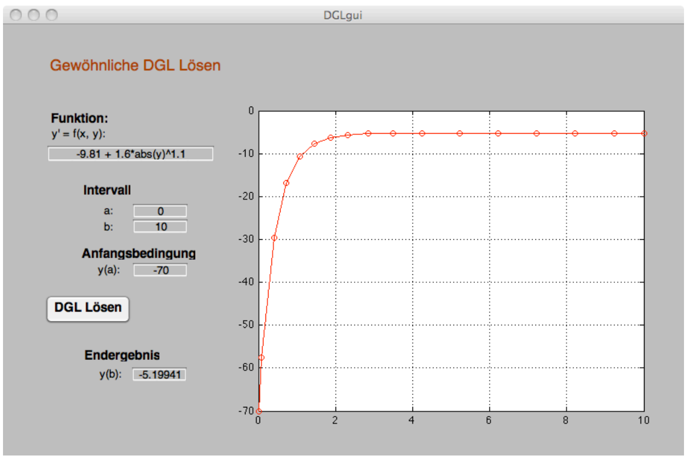
- Ereignissteuerung

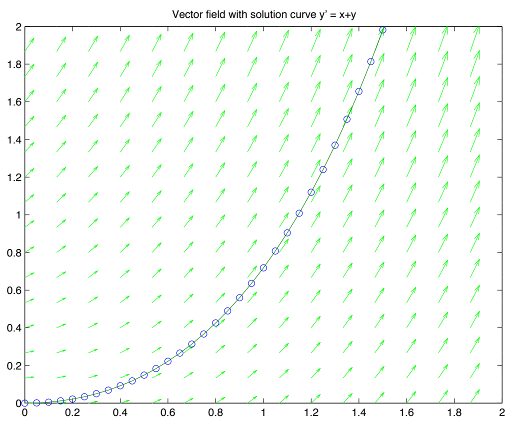
  ```
  function [fun, act, dir] = my_event(t, y)
  fun = y(1); act = 1; dir = 0;

  options = odeset('Events', 'my_events', 'RelTol', 1e-4, 'MaxStep', 0.1);
  ```

- Symbolische Lösung

  ```
  dsolve('Dy = f(x, y)', 'y(x0) = y0', 'x')
  ```

Aufgabe: GUI für Diff.gleichungen





Ein Vektorfeld wird mit der Funtion `quiver(x, y, u, v, scale)` erzeugt.