Aufgabenblatt DE3

Table of Contents

2017-11-13

Aufgabe 3.1 Pendel

Ein idealisiertes physikalisches Pendel schwingt unter den Einfluss der Schwerkraft entsprechend der folgenden DGL fuer die Auslenkung z (im Bogenmass)

```
z''(t) = - g / L * sin(z(t))
```

mit L der Laenge des Pendels und g = 9.81 m/s^2 der Erdbeschleunigung. Setzen Sie z_1 = z, z_2 = z' und loesen Sie die DGL fuer ein Pendel von einem Meter Laenge und der maximalen Auslenkung von 45 Grad.

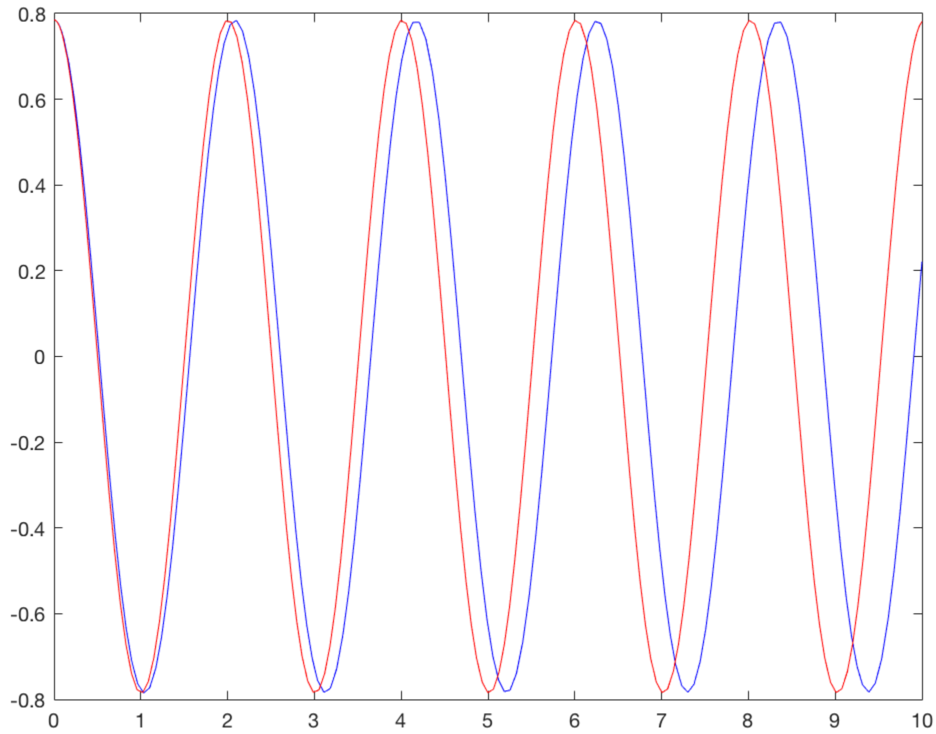
Loesen Sie entsprechend die vereinfachte Pendelgleichung fuer kleine Auslenkungen

```
z''(t) = - g /L * z(t)
```

und zeichnen Sie in einem Plot nur die Auslenkungen der beiden Pendelbewegungen zusammen auf.

```
% Konstanten
g = 9.81;
L = 1.0;

% DGL des phys. Pendels: Z = (z1, z2) = (z, z')
% z1' = z2
% z2' = -g/L *sin(z1)
f31 = @(t, Z) [Z(2)
               -g/L * sin(Z(1))];

% Loesung
[t1, Z1] = ode45(f31, [0, 10], [pi/4, 0]);

% Plotten der Loesung
plot(t1, Z1(:, 1), 'b')

% DGL des vereinfachten Pendels: Z = (z1, z2) = (z, z')
% z1' = z2
% z2' = -g/L * Z(1)
f31 = @(t, Z) [Z(2)
               -g/L * Z(1)];
```

```
% Loesung
[t2, Z2] = ode45(f31, [0, 10], [pi/4, 0]);

% Plotten der Loesung
hold on
plot(t2, Z2(:, 1), 'r')
hold off
```



Das reale Pendel schwingt langsamer als das vereinfachte Pendel !

Aufgabe 3.2: Van der Pol Gleichung

Loese die klassische van der Pol Gleichung eines Oszillators mit folgenden Parametern und Anfangsbedingungen ueber einem geeigneten Zeitraum.

```
y'' - mu (1 - y^2) y' + y = 0
```

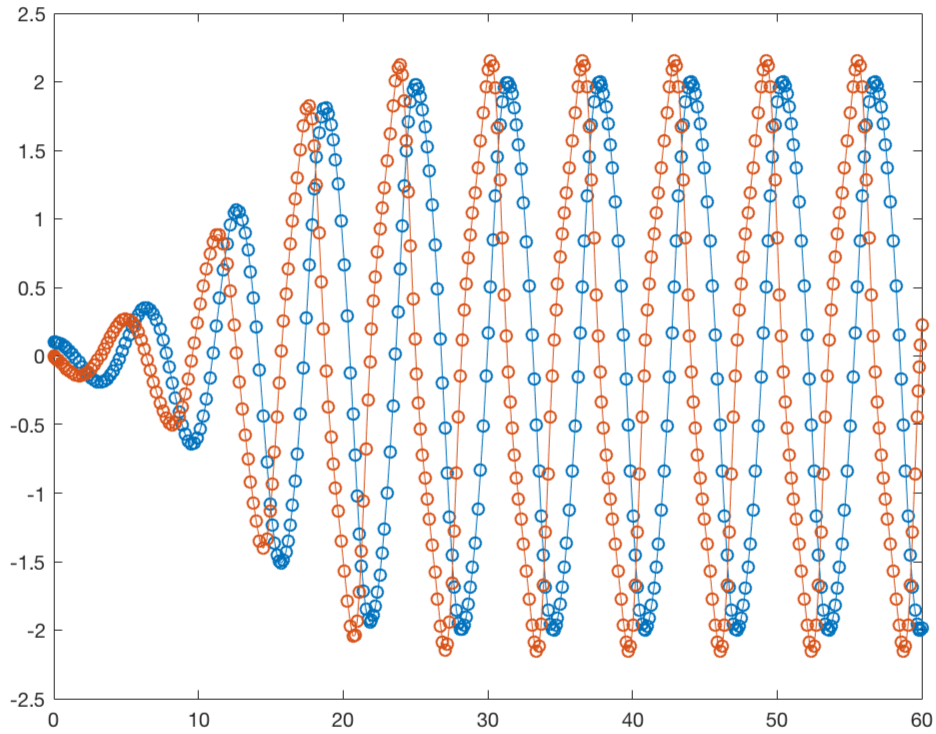
(a) mu = 0.4, y(0) = 0.1, y'(0) = 0 (b) mu = 2.0, y(0) = 1.0, y'(0) = 1

Plotte im Fall (b) auch noch y' gegen y

```
% DGL mit y1 = y, y2 = y'
% y1' = y2
% y2' = mu * (1 - y1^2) * y2 - y1
```

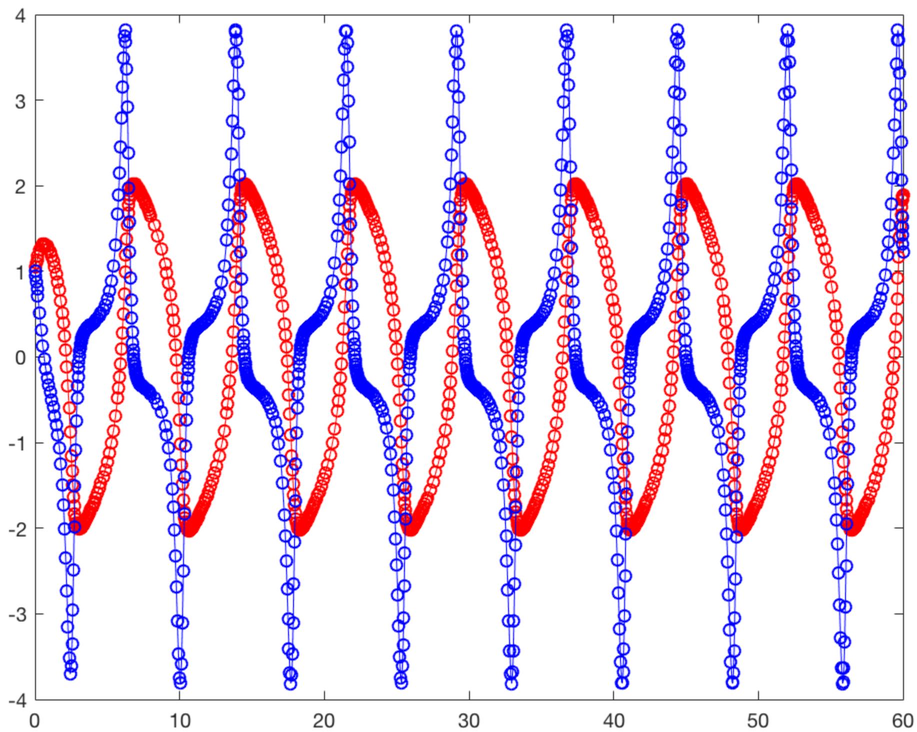
Loesung (a)

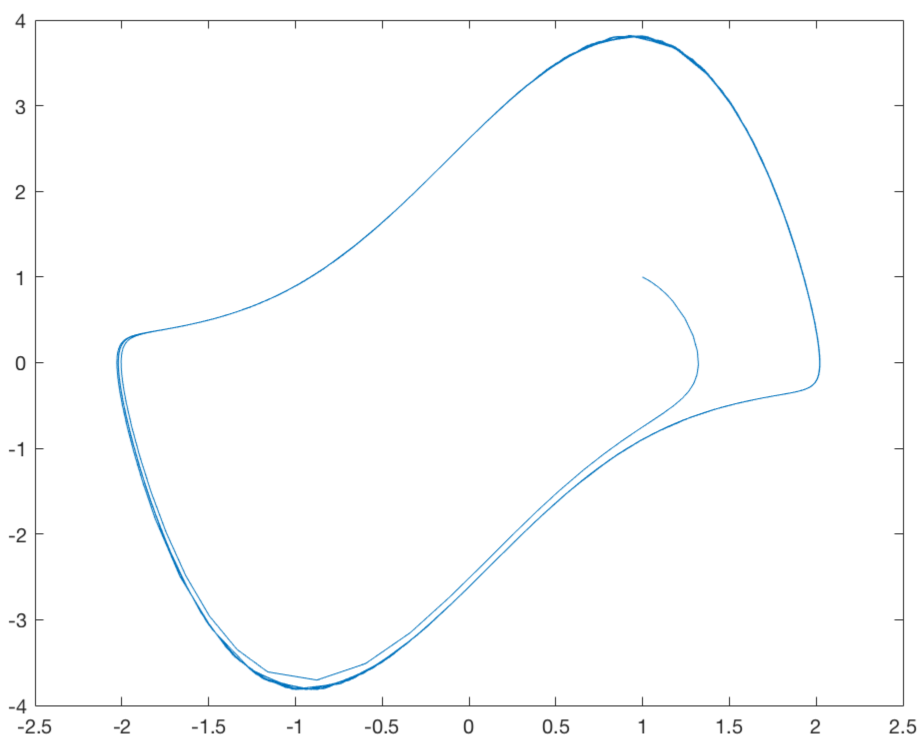
```
% Konstanten
mu = 0.4;

% DGL
f31 = @(t, y) [y(2)
               mu * (1 - y(1)^2) * y(2) - y(1)];

% Loesung
ode45(f31, [0, 60], [0.1, 0])
```



Loesung (b)

```
% Konstanten
mu = 2.0;

% DGL
f31 = @(t, y) [y(2)
               mu * (1 - y(1)^2) * y(2) - y(1)];

% Loesung
[t, y] = ode45(f31, [0, 60], [1.0, 1.0]);
figure()
plot(t, y(:,1), 'o-r', t, y(:,2), 'o-b')
figure()
plot(y(:, 1), y(:, 2))
```


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
10
20
30
40
50
60


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Aufgabe 3.3 Baseballwurf

Der Wurf eines Baseballs, abgeworfen unter einem Winkel von 40 Grad und mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s, folgt in etwa den DGLen

```
x'' = -r  v x'(t)
y'' = -r  v x'(t) - g
```

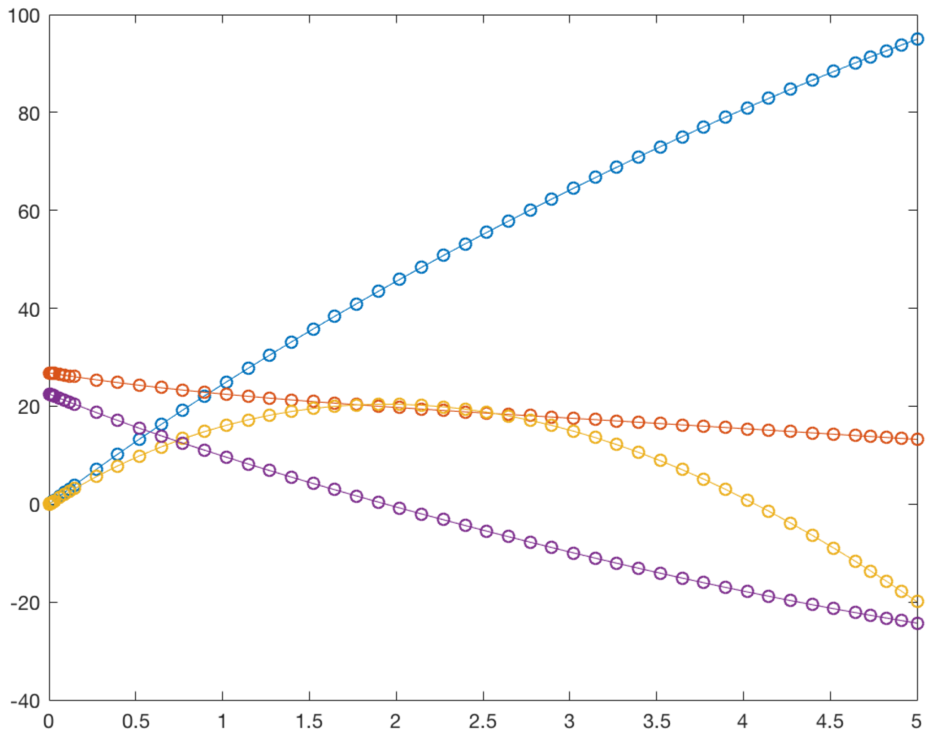
mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81$ [m/s^2] und dem Luftwiderstandswert r = 0.002. Die Geschwindigkeit ist offenbar v = sqrt(x'^2 + y'^2) .

Mit den Funktionen y11 = x, y2 = x', y3 = y, y4 = y' entsteht daraus ein neues System von DGLen:

```
y1' = y2
y2' = -r  v  y2
y3' = y4
y_4' = -r v y4 - g
```

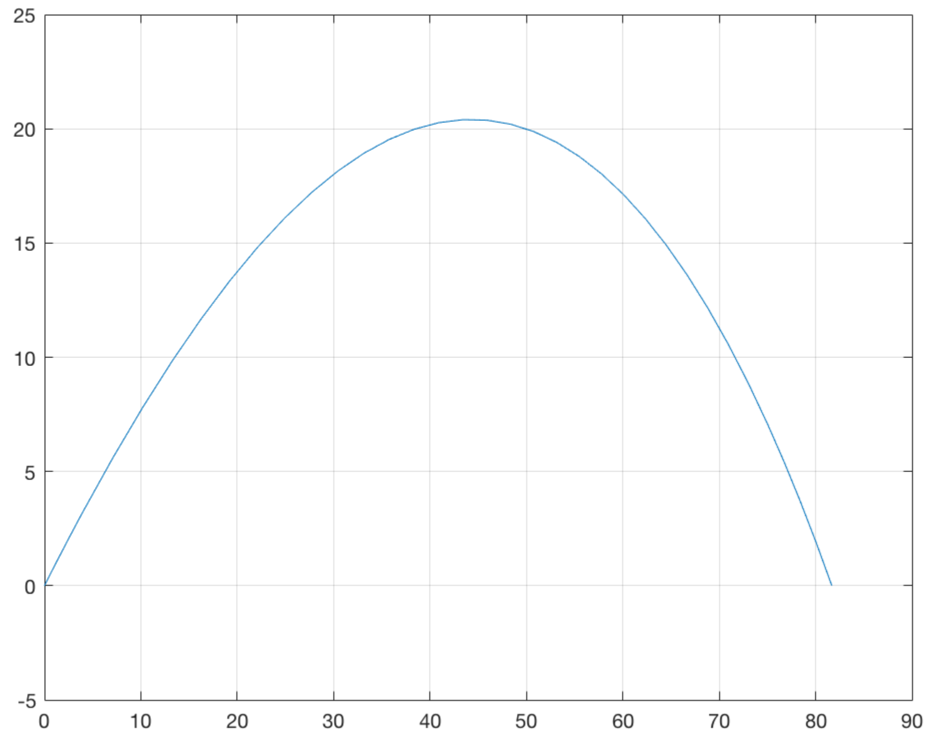
(1) Bestimme die Anfangsbedingungen fuer (y1, y2, y3, y4) und loese die DGL. (2) Veranschauliche den Weg des Baseballs ueber dem Spielfeld. (Plotte y1, y3.) (3) Wann genau und in welcher Entfernung trifft der Baseball wieder auf dem Boden auf?

```
% Konstanten
g = 9.81;
r = 0.006;

% Geschwindigkeit
v = @(z) sqrt(z(2)^2 + z(4)^2);

% DGL fuer z = (x, x', y, y')
f33 = @(t, z) [z(2)
               -r * v(z) * z(2)
               z(4)
               -r* v(z) * z(4) - g];

% (1) ode45 mit Anfangsbedingungen
ode45(f33, [0, 5], [0, 35*cosd(40), 0, 35*sind(40)])
```



Abbruch wenn z(3) = 0 in Funktion fall33.m

```
function [fun, act, dir] = fall33(t, y)
fun = y(3);  % Nullstelle y = 0
act = 1;     % Abbrechen
dir = 0;     % -1 fallend, +1 steigend
end

% Optionen fuer ode45:
opts33 = odeset('Events', @fall33);
[t, y] = ode45(f33, [0, 5], [0, 35*cosd(40), 0, 35*sind(40)], opts33);

% (2)
figure()
plot(y(:,1), y(:, 3)), grid()

% (3)
disp('Zeitliche Dauer des Wurfes: '), disp(t(end))
disp('Weite des Wurfes: '), disp(y(end, 1))

Zeitliche Dauer des Wurfes:
   4.068201234571663
Weite des Wurfes:
  81.681169744722013
```



Aufgabe 3.4 Roboterarm

Die folgende Differenzialgleichung beschreibe die Winkelposition theta eines mechanischen Roboterarmes:

```
theta'' =  a/(b - theta) - theta theta'^2/(1 + theta^2)
```

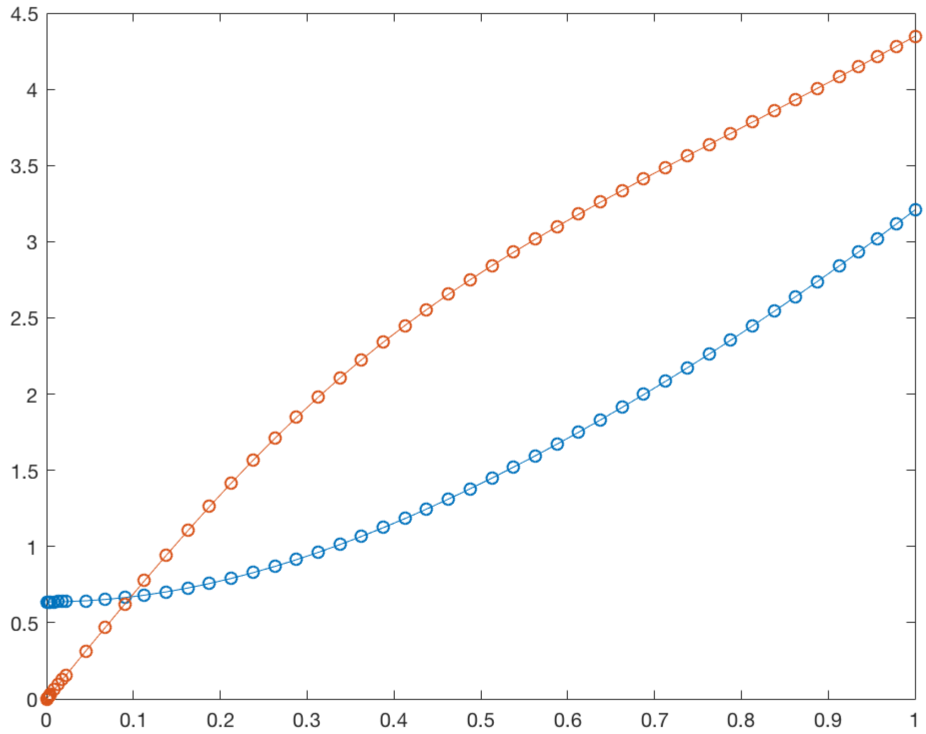
mit a = 100 und b = 15. Die Anfangsbedingungen sind theta(0) = 2\pi und theta'(0) = 0.

Stelle die Loesung im Intervall [0, 1] graphisch dar und bestimme theta und theta' zum Zeitpunkt t = 0.5 s exakt. Die Geschwindigkeit ist in [km/h] angeben.

```
% Konstanten
a = 100;
b = 15;

% DGL mit T = (T1, T2) = (theta, theta')
% T1' = T2
% T2' = a/(b - T1) - T1 * T2^2 /(1 + T1^2)
f33 = @(t, T) [T(2)
               a/(b - T(1)) - T(1)*T(2)^2/(1 + T(1)^2)];

% ODE
ode45(f33, [0, 1], [2/pi, 0])

% Genaue Bestimmung fuer t = 0.5
```

```
[t, T] = ode45(f33, [0, 0.5], [2/pi, 0]);
disp(' theta:'), disp(T(end, 1))
disp('dtheta in m/s'), disp(T(end, 2))
disp('dtheta in km/h'), disp(3.6*T(end, 2));
```

```
 theta:
   1.412669223448588
dtheta in m/s
   2.795560265284271
dtheta in km/h
  10.064016955023378
```



Aufgabe 3.5 Erzwungene Schwingung

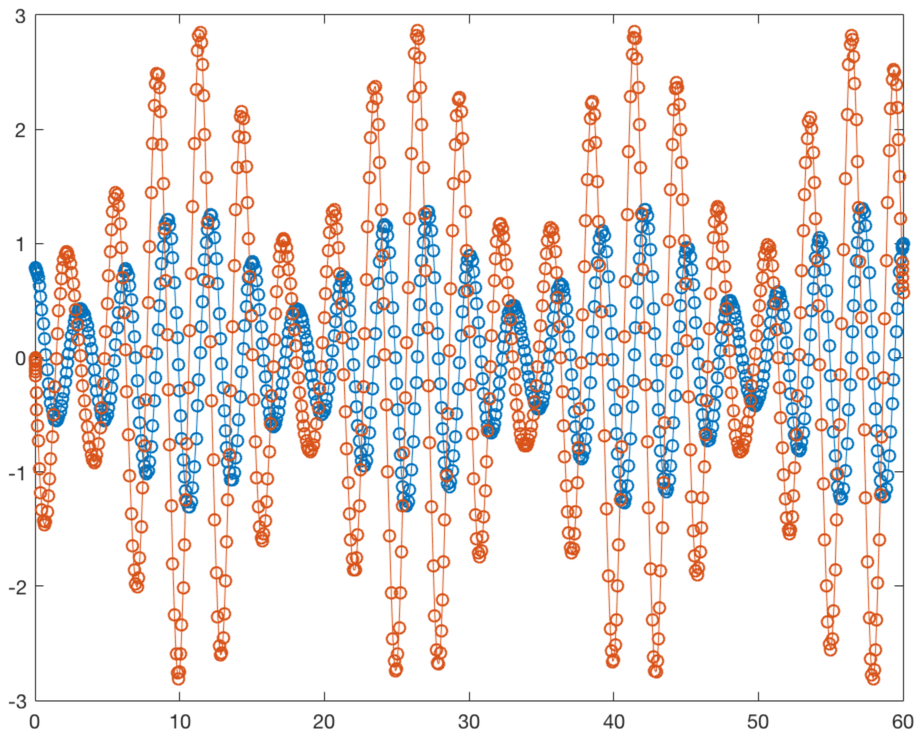
Ein Pendel ist frei beweglich an einem horizontalen Stab aufgehaengt. Das Pendel ist zum Zeitpunkt t0 = 0 in Ruhe, wenn eine oszillierende Bewegung y(t) = Y sin(omega t) auf die Aufhaengung einwirkt. Der Winkel z der Auslenkung folgt dann einer Differenzialgleichung

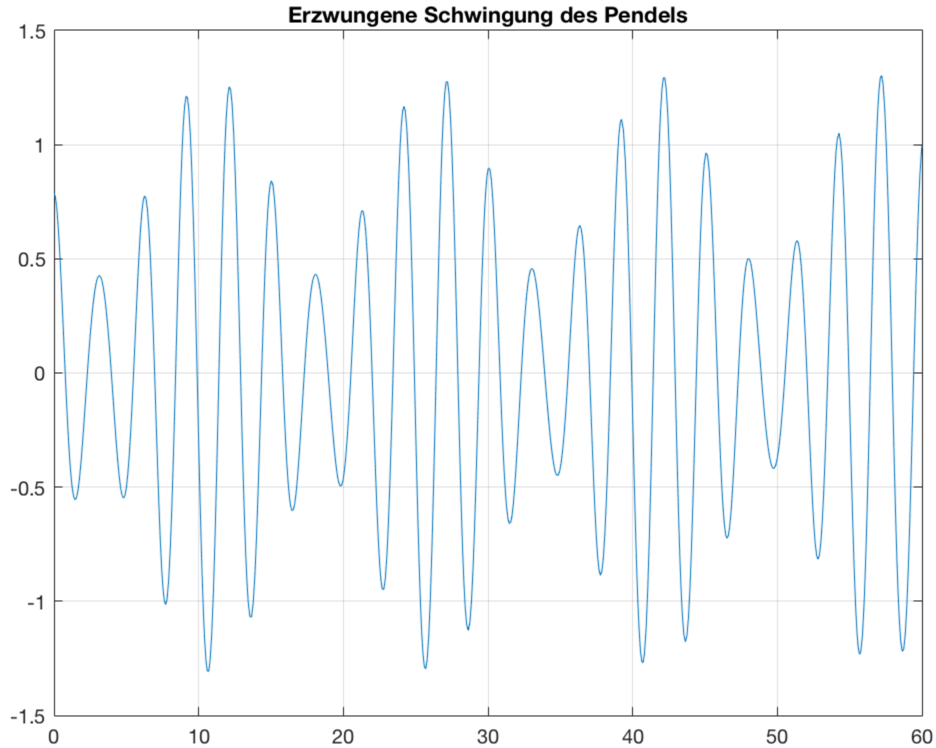
```
z'' = - g/L * sin(z) + omega^2/L*Y * cos(z) * sin(omega * t)
```

mit g = 9.81 m/s^2, L = 1.0 m, Y = 0.25 m und omega = 2.5 rad/s.

```
% Loese die Differenzialgleichung und stelle die Auslenkung des
 Pendels
% ueber einen Zeitraum von 60 Sekunden graphisch dar,
% Graphik mit Beschriftung, Grid und Legende.
```

```
% Konstanten
g = 9.81;
L = 1.9;
Y = 0.25;
omega = 2.5;

% DGL mit z = (z1, z2) = (z, z')
f35 = @(t, z) [z(2)
    -g/L * sin(z(1)) + omega^2/L * Y * cos(z(1))*sin(omega*t)];

% ODE45
ode45(f35, [0, 60], [pi/4, 0])

% Plot: Auslenkung des Pendels
[t, z] = ode45(f35, [0, 60], [pi/4, 0]);
figure()
plot(t, z(:, 1))
grid()
title('Erzwungene Schwingung des Pendels')
```





Aufgabe 3.6 PISA Test

Ein Baseball falle am Turm von Pisa aus einer Hoehe von 50 m in genau 4 sec auf den Boden. Wie gross ist sein Luftwiderstandswert r, wenn die folgende Differenzialgleichung den freien Fall beschreibt (y(t) die Hoehe ueber dem Boden):

```
y'' = - g + r y'^2
```

Bestimme r auf etwa drei Nachkommastellen.

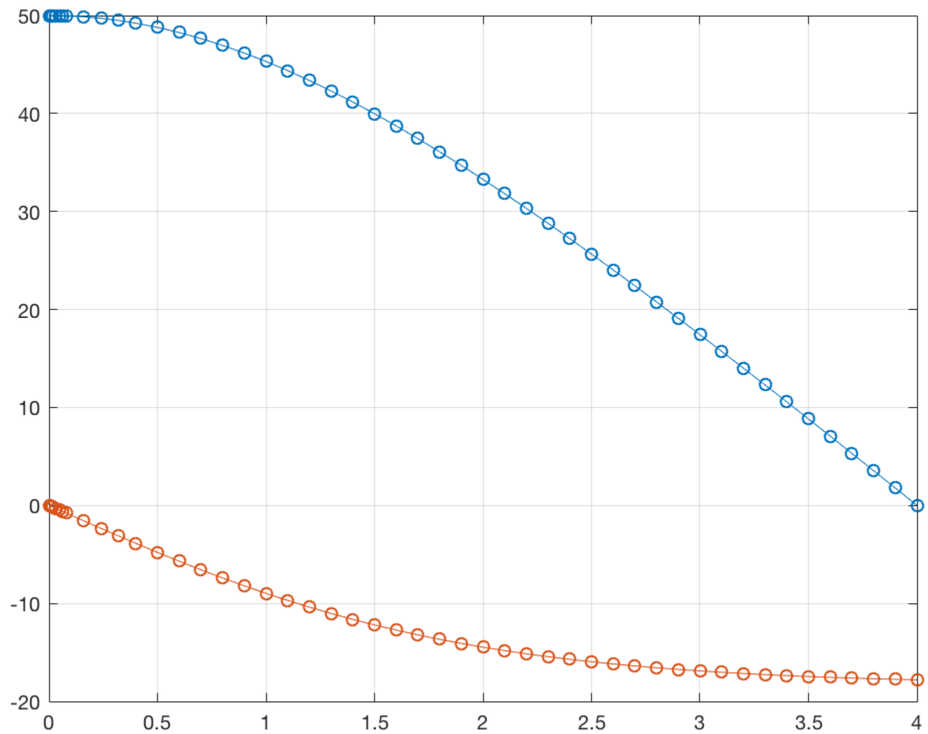
```
% Konstanten
g = 9.81;

% DGL mit y1 = y, y2 = y'
% y1' = y2
% y2' = -g + r * y2^2
```

Schreibe eine Funktion von r, welche die Fallzeit fuer dieses r bestimmt.

```
function t0 = fallzeit(r)
g = 9.81;
f = @(t, y) [y(2); -g + r * y(2)^2];
opts = odeset('Events', @fall0);
[t, y] = ode45(f, [0, 5], [50, 0], opts);
t0 = t(end);
end
```

```
r0 = fzero(@(t) fallzeit(t) - 4, [0, 5]);
disp('Berechneter Luftwiderstandswert: ')
disp(r0)

f36 = @(t, y) [y(2); -g + r0 * y(2)^2];
ode45(f36, [0, 4], [50, 0])
grid()
```

```
Berechneter Luftwiderstandswert:
   0.029299341633455
```



Published with MATLAB® R2016a