Kurs Numerik Wintersemester 2017	Aufgabenblatt 3 **Diff.gleichungen zweiter Ordnung**	Hans W Borchers DHBW Mannheim

3.1 Ideales Pendel

Ein idealisiertes physikalisches Pendel schwingt unter den Einfluss der Schwerkraft entsprechend der folgenden DGL für die Auslenkung z (im Bogenmass)

$$z''(t) = -\frac{g}{L}\, sin(z(t))$$

mit L der Länge des Pendels und $g = 9.81$ m/s^2 der Erdbeschleunigung. Setzen Sie $z_1 = z, z_2 = z'$ und lösen Sie die DGL für ein Pendel von einem Meter Länge und der maximalen Auslenkung von 45 Grad.

Lösen Sie entsprechend die vereinfachte Pendelgleichung für kleine Auslenkungen

$$z''(t) = -\frac{g}{L}\, z(t)$$

und zeichnen Sie in einem Plot nur die Auslenkungen der beiden Pendelbewegungen zusammen auf.

3.2 Van der Pol Gleichung

Lösen Sie die klassische van der Pol Gleichung eines Oszillators mit folgenden Parametern und Anfangsbedingungen über einem geeigneten Zeitraum.

$$y'' - \mu(1 - y^2)\, y' + y = 0$$

(a) $\mu = 0.4, y(0) = 0.1, y'(0) = 0$
(b) $\mu = 2.0, y(0) = 1.0, y'(0) = 1$

Plotten Sie im Fall (b) auch noch y' gegen y (das Zustandsdiagramm).

3.3 Baseball

Der Wurf eines Baseballs, abgeworfen unter einem Winkel von 40 Grad und mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s, folgt in etwa den DGLen

$$\begin{aligned} x'' &= -r\, v\, x'(t) \\ y'' &= -r\, v\, x'(t) - g \end{aligned}$$

mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81$ [m/s^2] und dem Luftwiderstandswert $r = 0.002$. Die Geschwindigkeit ist offenbar $v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Mit den Funktionen $y_1 = x, y_2 = x', y_3 = y, y_4 = y'$ entsteht daraus ein neues System von DGLen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -r\, v\, y_2 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -r\, v\, y4 - g \end{aligned}$$

(1) Bestimme die Anfangsbedingungen für (y_1, y_2, y_3, y_4) und löse die DGL. (2) Veranschauliche den Weg des Baseballs über dem Spielfeld. (Plotte y_1, y_3.) (3) Wann genau und in welcher Entfernung trifft der Baseball wieder auf dem Boden auf?

3.4 Roboterarm

Die folgende Differenzialgleichung beschreibe die Winkelposition θ eines mechanischen Roboterarmes:

$$\theta'' = \frac{a(b-\theta) - \theta\theta'^2}{1+\theta^2}$$

mit $a = 100\ \mathrm{s}^{-2}$ und $b = 15$. Die Anfangsbedingungen sind $\theta(0) = 2\pi$ und $\theta'(0) = 0$.

Stelle die Lösung im Intervall $[0, 1]$ graphisch dar und bestimme θ und θ' zum Zeitpunkt $t = 0.5$ s exakt. Die Geschwindigkeit in [km/h] angeben.

3.5 Erzwungene Schwingung

Ein Pendel ist frei beweglich an einem horizontalen Stab aufgehängt. Das Pendel ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Ruhe, wenn eine oszillierende Bewegung $y(t) = Y\sin(\omega\, t)$ auf die Aufhängung einwirkt. Der Winkel z der Auslenkung folgt dann einer Differenzialgleichung

$$z'' = -\frac{g}{L}\sin(z) + \frac{\omega^2}{L} Y\cos(z)\sin(\omega\, t)$$

mit $g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$, $L = 1.0$ m, $Y = 0.25$ m und $\omega = 2.5$ rad/s.

Löse die Differenzialgleichung und stelle die Auslenkung des Pendels über einen Zeitraum von 60 Sekunden graphisch dar, Graphik mit Beschriftung, Grid und Legende.

3.6 PISA Test

Ein Baseball falle am Turm von Pisa aus einer Höhe von 50 m in genau 4 sec auf den Boden. Wie gross ist sein Luftwiderstandswert r, wenn die folgende Differenzialgleichung den freien Fall beschreibt ($y(t)$ die Höhe über dem Boden):

$$y'' = -g + r\, y'^2, \qquad y(0) = 50$$

Bestimme r auf etwa drei Nachkommastellen.