Kurs Numerik Wintersemester 2017	Aufgabenblatt 2 **Systeme von Diff.gleichungen**	Hans W Borchers DHBW Mannheim

2.1 Eine einfache DGL

Löse die folgende Differenzialgleichung *symbolisch* und *numerisch* im Intervall $[0, \pi]$ mit der Anfangswertbedingung $y(0) = 1$.

$$y' + y = \sin(x)$$

Zeichne in den von `ode45` erstellten Plot die symbolische Lösung als rote Kurve ein. Und zeichne zusätzlich das Vektorfeld ein.
Wie gross ist der maximale Fehler in den von `ode45` berechneten Punkten der Kurve?

2.2 Traktrix

Eine *Traktrix* (oder Schleppkurve) ist die Kurve, entlang der sich ein Objekt unter dem Einfluss der Reibung bewegt, dass entlang einer Linie an einem Seil, einer Kette gezogen wird.
Ein schweres Objekt befindet sich in $(0, 10)$, ein Traktor in $(1, 0)$. Das Objekt wird mit dem Traktor durch ein Seil der Länge $L = \sqrt{101}$ befestigt, dann fährt der Traktor entlang der Strasse (x-Achse) etwa 60 m weit. Wie sieht die Kurve aus, entlang der das Objekt gezogen wird?
Die Tangente der gesuchten Kurve zeigt immer in Richtung des Traktors, die Länge der Tangente bis zur x-Achse beträgt immer L. Daraus folgt, dass die Kurve die folgende Differenzialgleichung erfüllt:

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{\sqrt{L^2 - y(x)^2}}$$

Zeichne den Weg, den das Objekt beschreibt, als gestrichelte blaue Linie mit einer Linienbreite von 2. Wie nahe ist das Objekt an der Strasse, nachdem es 60 Meter geschleppt wurde?

2.3 Lotka-Volterra Modell

In einem geschlossenen Habitat gibt es Populationen von Beutetieren `x` und Räubern `y`, die sich über die Zeit entwickeln nach folgendem Modell:

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ dy/dt &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned}$$

mit der Konstanten $a = 2.0, b = 0.01, c = 1.0, d = 0.001$
(1) Berechne des Modell als DGL mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 300, y(0) = 150$.
(2) Erstellen Sie ein *Phasendiagramm* dieses Models, d.h. tragen Sie in einem Plot die Anzahl der Beutetiere gegen die Anzahl der Räuber auf.
(3) Wenn sich in dem Habitat maximal $x_0 = 2000$ Beutetiere (von Pflanzen) ernähren können, ändert sich die erste Gleichung zu

$$dx/dt = a(1 - \frac{x(t)}{2000})\, x(t) - b\, x(t)y(t)$$

Lösen Sie das System der DGLen für diesen Fall.

2.4 Radioaktiver Zerfall

Eine Probe enthalte 10 g eines radioaktiven Materials A, welches mit einer Halbwertszeit von 10 Stunden in ein anderes radioaktives Element B zerfällt. B hat eine Halbwertszeit von zweieinhalb Tagen. Zum Zeitpunkt 0 gab es in der Probe nur das Elementes A.

Ist H die Halbwertszeit eines radioaktiven Elementes, dann gilt $A'(t) = -\frac{log(2)}{H}\,A(t)$. Damit gilt es folgendes System von DGLen zu lösen:

$$\begin{aligned} &dA/dt = -log(2)/10\,A(t) \\ &dB/dt = -log(2)/60\,B(t) + log(2)/10\,A(t) \end{aligned}$$

(1) Wann ist die Menge des Stoffes B in der Probe am größten?
(2) Zum Zeitpunkt einer Messung gibt es zehn Mal so viele B-Atome in der Probe wie A-Atome. Wie viel Zeit ist seit Beginn des Experimentes vergangen?

2.5 Chemischer Reaktor

In einem Reaktor befinden sich drei chemische Substanzen mit den Anfangskonzentrationen 0.6, 0.2 und 0.2. Der Chemie-Ingenieur sagt Ihnen, dass die Konzentrationen der Stoffe in Gegenwart der anderen Stoffe sich nach folgenden Gesetzen verändern:

$$\begin{aligned} c_1' &= -k_1c_1 + k_3c_3 \\ c_2' &= k_1c_1 - k_2c_2 \\ c_3' &= k_2c_2 - k_3c_3 \end{aligned}$$

Die Konstanten gibt er an zu $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.2$, und $k_3 = 0.5$. Bestimmen Sie die Konzentrationen der drei Substanzen nach einer geeigneten Reaktionszeit.

2.6 Fallender Baseball

Ein Baseball falle aus einer Höhe von 20 Metern auf den Boden. Entsprechend den Fallgesetzen gilt für die Höhe y über dem Boden

$$y'' = c\,y'^{\,2} - g$$

mit der Erdbeschleunigung $g = 9.81$ und einem für einen Baseball typischen Luftwiderstandswert $c = 0.006$.
Definiere zwei neue Funktionen $y_1(t) = y(t)$ und $y_2(t) = y'(t)$ und schreibe die obige Gleichung als ein System von DGLen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= c\,y_2^2 - g \end{aligned}$$

Löse dieses Differenzialgleichungssystem. Nach wieviel Sekunden genau(!) trifft der Baseball am Boden auf und mit welcher Geschwindigkeit?
Nach wieviel Sekunden würde er auftreffen, wenn der Luftwiderstand nicht da wäre. (Theoretisch zu lösen, nicht numerisch.)